Collège Moulay Abderrahmane	**Géométrie dans l'espace** **Exercices des examens régionaux** **Tanger - Tétouan – el Hoceima**	Pr. ESSADKI Abdeslam 3APIC

Exercice 1 : (2013)

$SABCD$ est une pyramide régulière de base un carré et sa hauteur $[SH]$ telle que :

$$SH = 12\ m \text{ et } AB = 24\ m$$

1) a. Calculer AC

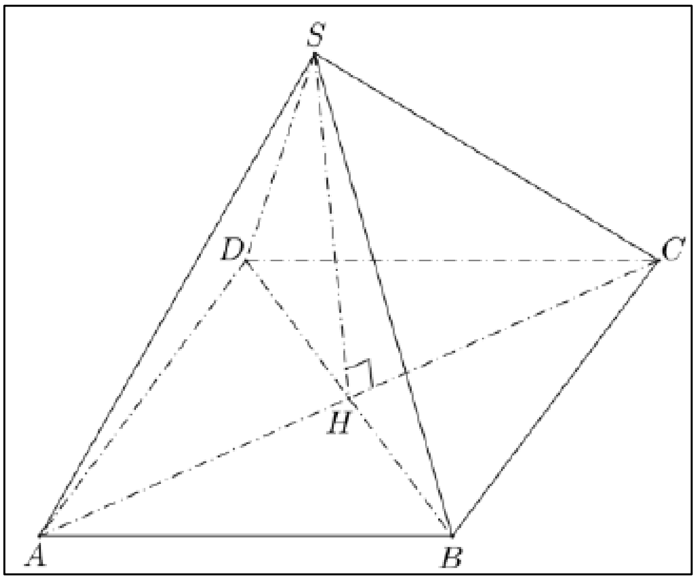
b. Déduire que $SA = 12\sqrt{3}\ m$

2) Déterminer V_1 le volume de la pyramide $SABCD$. ($par\ m^3$)

3) Nous avons fait un design pour cette pyramide avec une échelle de $e = \frac{1}{20}$, et on obtient un solide de volume V_2

a. Déterminer $\frac{V_1}{V_2}$? Justifier votre réponse.

b. Déduire V_2 $(par\ dm^3)$



Exercice 2 : (2014)

$ABCDEFGH$ un cube , I le centre de carrée $ABCD$ et $AB = 6\ cm$.

1) a. Montrer que $ID = 3\sqrt{2}\ cm$

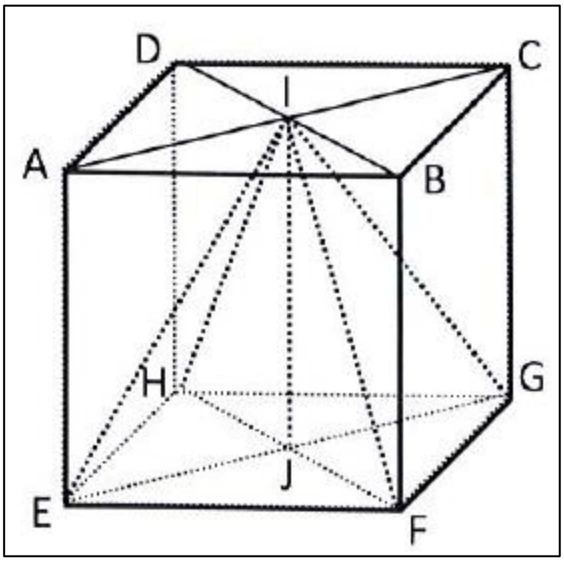
b. Montrer que (DH) et (DI) sont perpendiculaires.

c. Déduire que : $IH = 3\sqrt{6}\ cm$

2) a. Montrer que le volume de la pyramide régulière $IEFGH$ est $72\ cm^3$

b. Le cube a été agrandi de façon que le volume de la pyramide $IEFGH$ devient $9000\ cm^3$

Calculer le rapport de cet agrandissement k



Exercice 3 : (2015)

Soit $SABCD$ une pyramide de base le rectangle $ABCD$ et sa hauteur $[SA]$ telle que :

$$SA = 15\ cm \quad , \qquad AB = 8\ cm \quad \text{et} \quad BC = 11\ cm$$

A' est un point de $[SA]$ tel que : $SA' = 3\ cm$

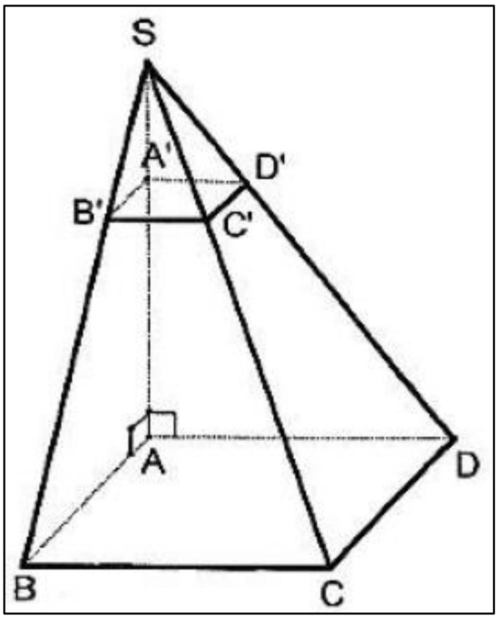
1) Calculer V_1 le volume de la pyramide $SABCD$

2) Montrer que $SB = 17\ cm$

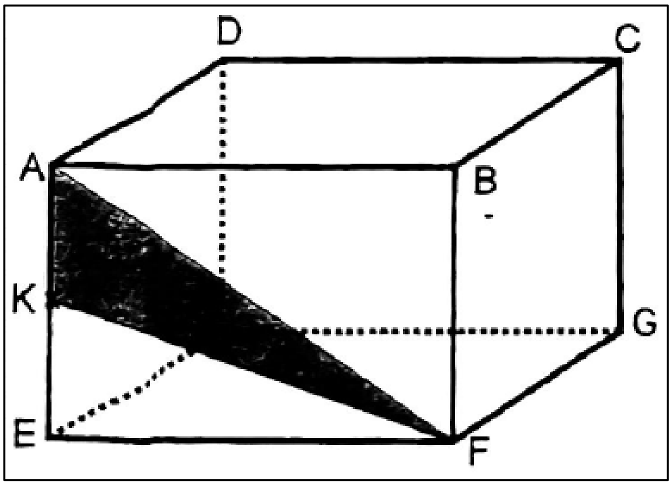
3) On coupe la pyramide $SABCD$ par un plan parallèle à la base et passant par le point A' , on obtient la pyramide $SA'B'C'D'$ qui représente la réduction de la pyramide $SABCD$.

a. Déterminer k le rapport de réduction.

b. Calculer V_2 le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$ en fonction de V_1



Exercice 4 : (2016)



$ABCDEFGH$ un parallélépipède tel que :

$AB = 2\sqrt{5}\ cm$; $AD = 3\ cm$ **et** $AE = \sqrt{5}\ cm$

K est le milieu de $[AE]$ (voir la figure)

1) a. Montrer que la surface du triangle AFK est : $S = 2,5\ cm^2$

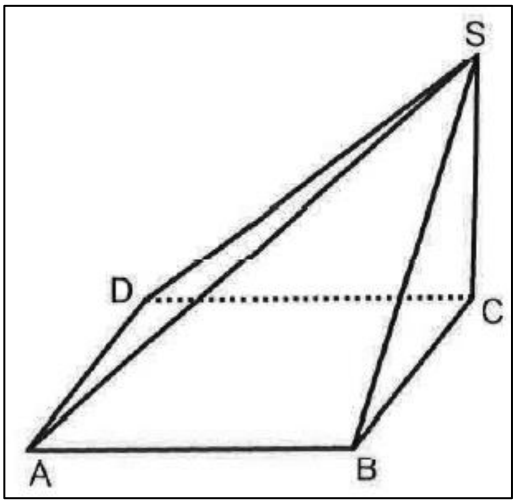
b. Déduire que le volume de la pyramide $AFKG$ est : $V = 2,5\ cm^3$

2) La pyramide $A'F'K'G'$ est une réduction de la pyramide $AFKG$ tel que la surface du triangle $A'F'K'$ est $S' = 0,9\ cm^2$

a. Montrer que le rapport de réduction est $k = 0,6$

b. Déduire V' le volume de la pyramide $A'F'K'G'$

Exercice 5 : (2017)



$SABCD$ est une pyramide de base le carré $ABCD$ et sa hauteur $[SC]$ telle que : $SB = 5\ cm$ et $AB = 4\ cm$

1) a. Montrer que $(SC) \perp (BC)$

b. Montrer que : $SC = 3\ cm$

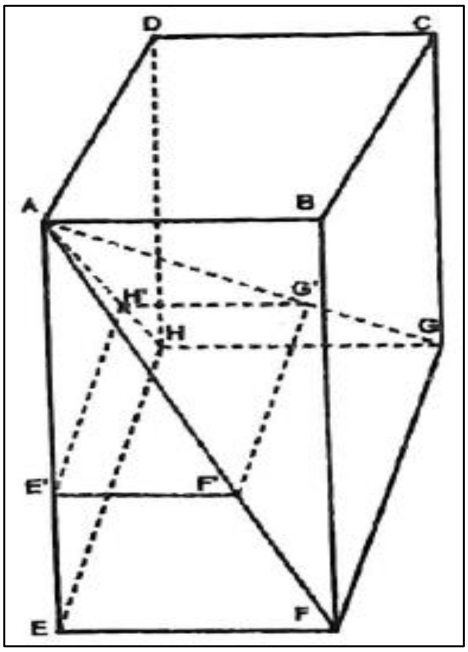
2) Calculer V le volume da la pyramide $SABCD$.

3) On a agrandi la pyramide $SABCD$ par un rapport k et on a obtenu une pyramide dont la surface de sa base est $100\ cm^2$

a. Montrer que $k = \frac{5}{2}$

b. Déduire V' le volume de la grande pyramide.

Exercice 6 : (2018)



Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tels que : $AB = 3\ cm$, $AE = 6\ cm$ et $AD = 4\ cm$

1) a. Montrer que $AF = 3\sqrt{5}\ cm$

b. Montrer que (AE) est perpendiculaire au plan (EFH).

2) Montrer que le volume de la pyramide $AEFGH$ est $V = 24\ cm^3$

3) On coupe la pyramide $AEFGH$ par un plan parallèle à la base et passant par le point F' tel que $F' \in [AF]$ et $AF' = 2\sqrt{5}\ cm$, on obtient une pyramide $AE'F'G'H'$ qui représente la réduction de la pyramide $AEFGH$ de rapport k

a. Montrer que $k = \frac{2}{3}$

b. Soit V' le volume de la pyramide $AE'F'G'H'$

Vérifier que $7,1\ cm^3 < V' < 7,2\ cm^3$

Exercice 7 : (2019)

Dans la figure ci-contre, $SABCD$ est une pyramide régulière de base le carré $ABCD$ et sa hauteur $[SE]$ telle que :

$$BD = 10\ cm \text{ et } SE = 9\ cm$$

1) Montrer que $AB = 5\sqrt{2}\ cm$

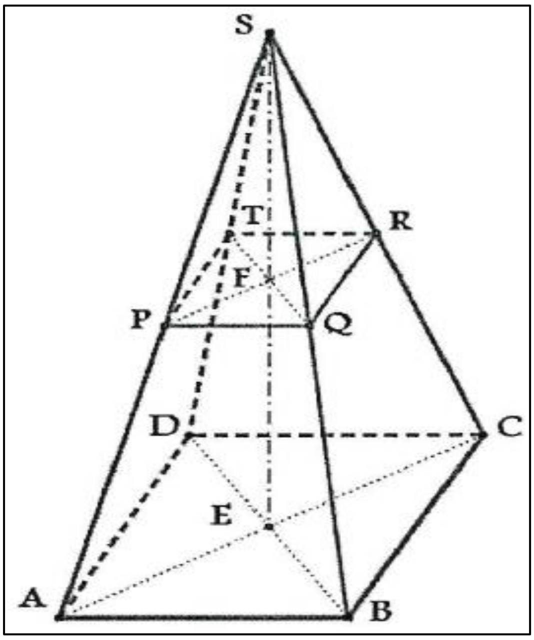
2) Montrer que le volume de la pyramide $SABCD$ est : $V = 150\ cm^3$

Soit un point F le milieu de segment $[SE]$.

On coupe la pyramide $SABCD$ par un plan parallèle à la base et passant par le point F, on obtient une pyramide $SPQRT$ qui représente une réduction de la pyramide $SABCD$ de rapport k

3) a. Montrer $k = \frac{1}{2}$

b. Calculer V' le volume de la pyramide $SPQRT$.



Exercice 8 : (2022)

$SEFGH$ est une pyramide de base le carré $EFGH$ et sa hauteur $[SF]$ telle que : $EF = 6\ cm$ et $SF = 10\ cm$

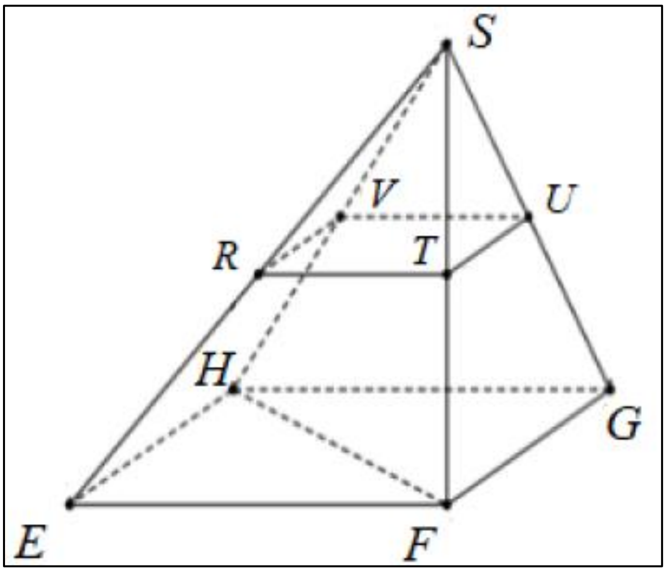
1) Montrer que $HF = 6\sqrt{2}\ cm$

2) Montrer que le volume de la pyramide $SEFGH$ est $V = 120\ cm^3$

3) La pyramide $SRTUV$ est une réduction de la pyramide $SEFGH$.

a. Sachant que le volume de la pyramide $SRTUV$ est $V' = 15\ cm^3$, déterminer k le rapport de réduction.

b. En déduire la distance VT



Exercice 9 : (2023)

$ABCDMNPQ$ est un cube tel que : $AB = 15\ cm$

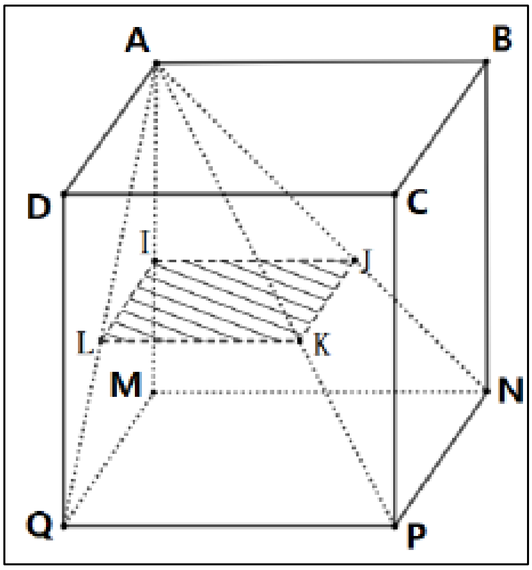
1) Montrer que la droite (AM) est perpendiculaire au plan (MNQ)

2) Montrer que le volume de la pyramide $AMNPQ$ est $V = 1125\ cm^3$

3) La pyramide $AIJKL$ est une réduction de $AMNPQ$ telle que l'aire du quadrilatère $IJKL$ est $81 cm^2$

a. Montrer que le rapport de la réduction est $k = \frac{3}{5}$

b. En déduire le volume de la pyramide $AIJKL$



Exercice 1 : (2013)

Solution :

1) a. On a : $ABCD$ est un carré

Alors ABC est un triangle rectangle en B

Donc d'après le théorème de Pythagore direct,

on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

C-à-d : $AC^2 = 24^2 + 24^2$

C-à-d : $AC^2 = 576 + 576$

C-à-d : $AC^2 = 1152$

C-à-d : $AC = \sqrt{1152}$

C-à-d : $AC = \sqrt{576 \times 2}$

Donc : $AC = 24\sqrt{2}\ m$

b. On a : $(SH) \perp (AH)$

Alors : SAH est un triangle rectangle en H

Donc d'après le théorème de Pythagore direct,

on a : $SA^2 = SH^2 + AH^2$

Et puisque : $SABCD$ est une pyramide régulière de base le carré $ABCD$ et sa hauteur $[SH]$

Alors : le point H est le milieu des diagonales du carrée $ABCD$

Par suite : le point H est le milieu de $[AC]$

Donc : $SA^2 = \mathrm{SH}^2 + \left(\frac{\mathrm{AC}}{2}\right)^2$

C-à-d : $SA^2 = 12^2 + \left(\frac{24\sqrt{2}}{2}\right)^2$

C-à-d : $SA^2 = 144 + 288$

C-à-d : $SA^2 = 432$

Donc : $SA = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}\ m$

2) On sait que : $V_1 = \frac{1}{3} S_B \times h$

Donc : $V_1 = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SH$

C-à-d : $V_1 = \frac{1}{3} \times 24^2 \times 12$

C-à-d : $V_1 = \frac{1}{3} \times 576 \times 12$

Donc : $V_1 = 2304\ m^3$

3) a. Nous avons fait un design pour cette pyramide avec une échelle de $e = \frac{1}{20}$, et on obtient un solide de volume V_2

Alors : $V_2 = e^3 \times V_1$

C-à-d : $\frac{V_2}{V_1} = e^3$

C-à-d : $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{1}{20}\right)^3$

Donc : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{8000}$

b. On a : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{8000}$

Alors : $V_2 = \frac{1}{8000} \times V_1$

C-à-d : $V_2 = \frac{1}{8000} \times 2304$

C-à-d : $V_2 = 0,288\ m^3$

C-à-d : $V_2 = 0,288 \times 10^3\ dm^3$

Donc : $V_2 = 288\ dm^3$

Exercice 2 : (2014)

Solution :

1) a. On a : $ABCD$ est un carré

Alors ABD est un triangle rectangle en A

Donc d'après le théorème de Pythagore direct,

on a : $BD^2 = AB^2 + AD^2$

C-à-d : $BD^2 = 6^2 + 6^2$

C-à-d : $BD^2 = 36 + 36$

C-à-d : $BD^2 = 72$

C-à-d : $BD = \sqrt{72}$

C-à-d : $BD = \sqrt{36 \times 2}$

Donc : $BD = 6\sqrt{2}\ cm$

Et on : I est le centre du carrée $ABCD$

Alors : I est le milieu de $[BD]$

Par suite : $ID = \frac{BD}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ cm$

b. On a : $DHGC$ est un carrée

Alors : $(DH) \perp (DC)$

Et on a : $ADHE$ est un carrée

Alors : $(DH) \perp (AD)$

Et puisque : (DC) et (AD) sont incluses dans le plan $(ABCD)$ et sécantes en D

Alors : $(DH) \perp (ABCD)$

Et puisque : (DI) est incluse dans le plan $(ABCD)$

Alors : $(DH) \perp (DI)$

c. On a : $(DH) \perp (DI)$

Alors DHI est un triangle rectangle en D

Donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a : $IH^2 = DH^2 + DI^2$

C-à-d : $IH^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2$

C-à-d : $IH^2 = 36 + 18$

C-à-d : $IH^2 = 54$

C-à-d : $IH = \sqrt{54}$

Donc : $IH = 3\sqrt{6}\ cm$

2) a. On sait que : $V = \frac{1}{3} S_B \times h$

Et on a : $h = IJ = DH = 6\ cm$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times EF^2 \times DH$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 6$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 36 \times 6$

Donc : $V = 72\ cm^3$

b. Soit V' le volume du pyramide $IEFGH$ après un agrandissement de rapport k.

Donc : $V' = k^3 \times V$

Par suite : $k^3 = \frac{V'}{V}$

C-à-d : $k^3 = \frac{9000}{72}$

C-à-d : $k^3 = 125$

C-à-d : $k^3 = 5^3$

Donc : $K = 5$

Exercice 3 : (2015)

Solution :

1) On a : SABCD est la pyramide de base le rectangle ABCD, et sa hauteur est [SA]

Alors : $V_1 = \frac{1}{3} \times S_{ABCD} \times SA$

C-à-d : $V_1 = \frac{1}{3} \times BC \times AB \times SA$

C-à-d : $V_1 = \frac{1}{3} \times 11 \times 8 \times 15$

Donc : $V_1 = 440\ cm^3$

2) On a : [SA] est la hauteur du pyramide SABCD

Alors : la droite (SA) est perpendiculaire au plan (ABCD) en A.

Et puisque : la droite (AB) est incluse dans le plan (ABCD).

Alors : la droite (SA) est perpendiculaire à la droite (AB) en A.

Par suite : le triangle SAB est rectangle en A

Donc d'après le théorème de Pythagore direct,

on a : $SB^2 = SA^2 + AB^2$

Donc : $SB^2 = 15^2 + 8^2$

C-à-d : $SB^2 = 225 + 64$

C-à-d : $SB^2 = 289$

C-à-d : $SB = \sqrt{289}$

D'où : $SB = 17$ cm

3) a. On a : la pyramide $SA'B'C'D'$ est la réduction de la pyramide SABCD

Alors : $[SA']$ est la réduction de $[SA]$

Par suite : $SA' = K \times SA$

Donc : $K = \frac{SA'}{SA}$

D'où : $K = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

b. On a : la pyramide $SA'B'C'D'$ est la réduction de la pyramide SABCD

Alors : $V_2 = k^3 \times V_1$

C-à-d : $V_2 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 440$

C-à-d : $V_2 = \frac{1}{125} \times 440$

D'où : $V_2 = 3,52\ cm^3$

Exercice 4 : (2016)

Solution :

1) a. On a : $ABCD$ est un rectangle

Alors : $(EF) \perp (AE)$

Et puisque : $K \in (AE)$, alors : $(EF) \perp (AK)$

Par suite : [EF] est la hauteur du triangle AFK

Donc : $S_{AFK} = \frac{EF \times AK}{2}$

Et puisque : K est le milieu de [AE]

Alors : $AK = \frac{AE}{2}$

Par suite : $S_{AFK} = \frac{EF \times \frac{AE}{2}}{2}$

C-à-d : $S_{AFK} = \frac{2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}}{2}$

C-à-d : $S_{AFK} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2}$

Donc : $S_{AFK} = \frac{5}{2}$

D'où : $S_{AFK} = 2,5\ cm^2$

b. On a : AFKG est la pyramide de base le triangle AFK, et sa hauteur est [FG]

Alors : $V = \frac{1}{3} \times S_{AFK} \times FG$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 2,5 \times 3$

Donc : $V = 2,5\ cm^3$

2) a. On a : le triangle $A'F'K'$ est la réduction du triangle AFK

Alors : $S' = k^2 \times S$

C-à-d : $k^2 = \frac{S'}{S}$

C-à-d : $k^2 = \frac{0,9}{2,5}$

C-à-d : $K = \sqrt{\frac{0,9}{2,5}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ (car $k > 0$)

Donc : $K = 0,6$
b. On a : $A'F'K'G'$ **est la réduction de AFKG**
Alors : $V' = k^3 \times V$
C-à-d : $V' = (0,6)^3 \times 2,5$
C-à-d : $V' = 0,216 \times 2,5$
Donc : $V' = 0,54\ cm^3$

Exercice 5 : (2017)

Solution :

1) a. On a : (SC) **est la hauteur de la pyramide** $SABCD$
Alors : la droite (SC) **est perpendiculaire au plan** $(ABCD)$ **en point** C
Et puisque la droite (BC) **est incluse dans le plan** $(ABCD)$ **, alors :** $(BC) \perp (SC)$
b. On a : $(BC) \perp (SC)$
Alors SBC **est un triangle rectangle en** C
Donc d'après le théorème de Pythagore direct,
on a : $SB^2 = SC^2 + BC^2$
C-à-d : $5^2 = SC^2 + 4^2$
C-à-d : $25 = SC^2 + 16$
C-à-d : $SC^2 = 25 - 16$
C-à-d : $SC^2 = 9$
D'où : $SC = \sqrt{9} = 3$ cm
2) On sait que : $V = \frac{1}{3} S_B \times h$
Alors : $V = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SC$
C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 3$
C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 16 \times 3$
D'où : $V = 16\ cm^3$
3) a. On a : k **est le rapport d'agrandissement**
Alors : $S'_{ABCD} = k^2 \times S_{ABCD}$
C.-à-d : $100\ cm^2 = k^2 \times 16\ cm^2$
Par suite : $k^2 = \frac{100\ cm^2}{16\ cm^2} = \frac{25}{4}$
Donc : $k = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ $\quad (\ car\ \ k > 0\ )$
b. On a : $k = \frac{5}{2}$ **est le rapport d'agrandissement**
Alors : $V' = k^3 \times V$
C-à-d : $V' = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times 16$
C-à-d : $V' = \frac{125}{8} \times 16$
D'où : $V' = 250\ cm^3$

Exercice 6 : (2018)

Solution :

1) a. On a : $ABFE$ **est un rectangle**
Alors AEF **est un triangle rectangle en** E
Donc d'après le théorème de Pythagore direct,
on a : $AF^2 = AE^2 + EF^2$
C-à-d : $AF^2 = 6^2 + 3^2$
C-à-d : $AF^2 = 36 + 9$
C-à-d : $AF^2 = 45$
C-à-d : $AF = \sqrt{45}$
C-à-d : $AF = \sqrt{9 \times 5}$
D'où : $AF = 3\sqrt{5}\ cm$
b. On a : $ABFE$ **est rectangle**
Alors : $(AE) \perp (EF)$
Et on a : $ADHE$ **est rectangle**
Alors : $(AE) \perp (EH)$
Et puisque : (EF) **et** (EH) **sont incluses dans le plan** (EFH) **et sécantes en** E
Alors : $(AE) \perp (EFH)$
2) On sait que : $V = \frac{1}{3} S_B \times h$
Alors : $V = \frac{1}{3} \times EF \times EH \times AE$
C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times 6$
D'où : $V = 24\ cm^3$
3) a. On a : $[AF']$ **est la réduction de** $[AF]$
Alors : $AF' = k \times AF$
Par suite : $k = \frac{AF'}{AF} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$
b. On a : la pyramide $AE'F'G'H'$ **la réduction de la pyramide** $AEFGH$
Alors : $V' = k^3 \times V$
C-à-d : $V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 24$
C-à-d : $V' = \frac{8}{27} \times 24$
C-à-d : $V' = \frac{8}{27} \times 24$
Donc : $V' = 7,11\ cm^3$
D'où : $7,1\ cm^3 < V' < 7,2\ cm^3$

Exercice 7 : (2019)

Solution :

1) On a : $ABCD$ **est un carré**
Alors ABD **est un triangle rectangle en** A
Par suite d'après le théorème de Pythagore direct,
on a : $BD^2 = AB^2 + AD^2$
C-à-d : $10^2 = AB^2 + AB^2$
C-à-d : $100 = 2AB^2$
C-à-d : $AB^2 = \frac{100}{2} = 50$
C-à-d : $AB = \sqrt{50}$
D'où : $AB = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$
2) On sait que : $V = \frac{1}{3} S_B \times h$
Alors : $V = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SE$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times (5\sqrt{2})^2 \times 9$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 25 \times 2 \times 9$

D'où : $V = 150\ cm^3$

3) a. On a : $[SF]$ est la réduction de $[SE]$

Alors : $SF = k \times SE$

Par suite : $k = \frac{SF}{SE} = \frac{SF}{2 \times SF} = \frac{1}{2}$

b. On a : la pyramide $SPQRT$ est la réduction de la pyramide $SABCD$

Alors : $V' = k^3 \times V$

C-à-d : $V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 150$

C-à-d : $V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 150$

C-à-d : $V' = \frac{1}{8} \times 150$

D'où : $V' = 18,75\ cm^3$

Exercice 8 : (2022)

Solution :

1) On a : $EFGH$ est un carré

Alors EFH est un triangle rectangle en E

Donc d'après le théorème de Pythagore direct,

on a : $HF^2 = EF^2 + EH^2$

Et puisque : $EF = EH = 6\ cm$

Alors : $HF^2 = 6^2 + 6^2$

C-à-d : $HF^2 = 36 + 36$

C-à-d : $HF^2 = 72$

C-à-d : $HF = \sqrt{36 \times 2}$

D'où : $HF = 6\sqrt{2}\ cm$

2) On a : $V = \frac{1}{3} S_B \times h$

Alors : $V = \frac{1}{3} \times EF^2 \times SF$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 10$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 36 \times 10$

D'où : $V = 120\ cm^3$

3) a. On a : la pyramide $SRTUV$ est la réduction de la pyramide $SEFGH$

Alors : $V' = k^3 \times V$

Par suite : $k^3 = \frac{V'}{V}$

C-à-d : $k^3 = \frac{15}{120}$

C-à-d : $k^3 = \frac{1}{8}$

C-à-d : $k^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

D'où : $K = \frac{1}{2}$

b. On a : la pyramide $SRTUV$ est la réduction de la pyramide $SEFGH$ de rapport $\frac{1}{2}$

Alors : $[VT]$ est la réduction du segment $[HF]$

Par suite : $VT = \frac{1}{2} \times HF$

C-à-d : $VT = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$

D'où : $VT = 3\sqrt{2}\ cm$

Exercice 9 : (2023)

Solution :

1) On a : $ABNM$ et $ADQM$ sont deux carrés

Alors : $(AM) \perp (MN)$ et $(AM) \perp (MQ)$

Et on a : (MN) et (MQ) sont incluses dans le plan (MNQ) et sécantes en M

Alors : (AM) est perpendiculaire au plan (MNQ)

2) On a : $V = \frac{1}{3} S_B \times h$

Alors : $V = \frac{1}{3} \times MN^2 \times AM$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 15^2 \times 15$

C-à-d : $V = \frac{1}{3} \times 225 \times 15$

D'où : $V = 1125\ cm^3$

3) a. On a : la pyramide $AIJKL$ est la réduction de la pyramide $AMNPQ$

Alors : $IJKL$ est la réduction de $MNPQ$

Par suite : $S' = k^2 \times S$

C-à-d : $k^2 = \frac{S'}{S}$

C-à-d : $k^2 = \frac{81}{MN^2}$

C-à-d : $k^2 = \frac{81}{15^2}$

C-à-d : $K = \sqrt{\frac{81}{15^2}}$ (car $K \geq 0$)

C-à-d : $K = \frac{9}{15}$

D'où : $K = \frac{3}{5}$

b. On a : la pyramide $AIJKL$ est la réduction de la pyramide $AMNPQ$

Alors : $V' = k^3 \times V$

C-à-d : $V' = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times 1125$

C-à-d : $V' = \frac{27}{125} \times 1125$

D'où : $V' = 243\ cm^3$